

dostupu

do

resursu:

http://www.rusnauka.com/NPM/Economics/10_10_zabara.doc.htm.

7. Hutkevych S. O. Upravlinnya ekonomichnymy resursamy pidpryyemstva / S. O. Hutkevych, O. I. Shamans'ka // Aktual'ni problemy ekonomiky. – 2009. - # 7. - S. 99 – 105.

Рецензент: Стрішенець О. М., д.е.н., зав. каф. економіки природокористування та економічної теорії Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки, м. Луцьк.

4.01.2016

УДК 330.356.7

Янковой Владимир, Вакула Алиса

ВЫБОР МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ФУНКЦИИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ЗАВИСИМОСТИ ВЫПУСКА ПРОДУКЦИИ ОТ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФАКТОРОВ

Обсуждаются теоретико-методологические вопросы использования производственных функций Кобба-Дугласа и функции с постоянной эластичностью замещения ресурсов (CES-функции) в процессе моделирования важнейших экономических показателей производства. Исследуются свойства указанных функций, в частности, их взаимосвязь, эластичность замещения ресурсов, характер зависимости производительности труда от фондовооруженности, возможность практической оценки их параметров в экономическом исследовании. Анализируются существующие в литературе подходы к выбору математической формы функции при моделировании зависимости выпуска продукции от производственных факторов. Кроме того, рассматривается вероятностно-статистический аспект такого выбора и вариант предварительного определения пригодности именно функции Кобба-Дугласа с обоснованным отказом от соответствующего программного обеспечения, которое обязательно необходимо при использовании CES-функции. Обсуждается применение в процессе выбора

математической формы функции элементов теории статистических критериев: проверки статистических гипотез, мощности критериев, необходимого объема выборки и др.

Ключевые слова: производственная функция, проверка статистических гипотез, оценка коэффициентов CES-функции.

Янковий Володимир, Вакула Аліса

ВИБІР МАТЕМАТИЧНОЇ ФОРМИ ФУНКЦІЇ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ЗАЛЕЖНОСТІ ВИПУСКУ ПРОДУКЦІЇ ВІД ВИРОБНИЧИХ ФАКТОРІВ

Обговорюються теоретико-методологічні питання використання виробничих функцій Кобба-Дугласа і функції з постійною еластичністю заміщення ресурсів (CES-функції) в процесі моделювання важливіших економічних показників виробництва. Досліджуються властивості зазначених функцій, зокрема, їх взаємозв'язок між собою, еластичність заміщення ресурсів, характер залежності продуктивності праці від фондоозброєності, можливість практичної оцінки їх параметрів в економічному дослідженні. Аналізуються існуючі в літературі підходи до вибору математичної форми функції при моделюванні залежності випуску продукції від виробничих факторів. Крім того, розглядається ймовірностатистичний аспект такого вибору і варіант попереднього визначення придатності саме функції Кобба-Дугласа з обґрунтованою відмовою від відповідного програмного забезпечення, яке обов'язково необхідне при використанні CES-функції. Обговорюється застосування в процесі вибору математичної форми функції елементів теорії статистичних критеріїв: перевірки статистичних гіпотез, потужності критеріїв, необхідного обсягу вибірки та ін.

Ключові слова: виробнича функція, перевірка статистичних гіпотез, оцінка коефіцієнтів CES-функції

CHOICE OF MATHEMATICAL FORM OF FUNCTIONS AT MODELING OF DEPENDENCE OF OUTPUT ON OPERATIONAL FACTORS

Theoretical and methodological issues of using Cobb-Douglas function with constant elasticity of substitution of resources (CES-function) in the process of modeling the most important economic indicators of production discussed. The properties of these functions, in particular, their relationship, the elasticity of substitution of resources, dependence on capital-labor productivity, the possibility of a practical estimation of their parameters in an economic studied. The existing literature approaches to the choice of the mathematical form of the function depending on the simulation output of the production factors analyzed. Probabilistic and statistical aspect of this choice and the option of a preliminary determination of suitability is Cobb-Douglas function with valid waiver of any software needed to be sure when using CES-function also considered. The application of mathematical form of functions of the elements of the theory of statistical tests: statistical hypothesis testing, power of the tests, the necessary sample size, and others considered.

Keywords: production function, statistical hypothesis testing, estimation of coefficients CES-function

Постановка проблемы. Одним из важнейших условий успешного использования производственных функций (ПФ) в экономических исследованиях является правильный выбор математической формы модели, адекватной наблюдаемой эмпирической информации. При этом следует учитывать, какие предпосылки и ограничения связаны с использованием той или иной функциональной формы для моделирования производственной деятельности субъектов хозяйствования, например, предприятий. Опыт показывает, что наиболее популярными среди экономистов являются неоклассические двухфакторные ПФ [1-4]:

1. Кобба-Дугласа

$$Y = A_0 K^\delta L^\theta. \quad (1)$$

2. Функция с постоянной эластичностью замещения ресурсов (*CES-функция* – от англ. аббревиатуры *Constant Elasticity of Substitution*)

$$Y = A[\alpha K^{-\beta} + (1 - \alpha)L^{-\beta}]^{-\frac{\gamma}{\beta}}, \quad (2)$$

где

Y – выпуск продукции в стоимостном выражении;

K – величина капитала, направленного в основные производственные фонды;

L – денежные затраты на оплату труда;

A_0, A – коэффициенты шкалы ($0 < A_0, A$);

δ, θ – параметры ПФ Кобба-Дугласа ($0 < \delta < 1; 0 < \theta < 1$);

α – коэффициент веса производственного фактора *CES-функции* ($0 < \alpha < 1$);

β – параметр *CES-функции* ($-1 < \beta$);

γ – показатель степени однородности *CES-функции* ($0 < \gamma$).

ПФ (1) и (2) аналогичны в том, что касается предположения о постоянном убывании предельной отдачи производственных ресурсов K и L . Это так называемые неоклассические условия, вытекающие из теории поведения потребителя, поскольку в отношении ресурсов предприятие является потребителем и ПФ характеризует именно этот аспект – производство как потребление. Можно показать, что ПФ Кобба-Дугласа и *CES-функция* тесно связаны между собой, а общее поведение эффективности при изменении масштабов производства, характерное для этих двух функций, всегда совпадает.

Однако, между этими ПФ есть и существенные различия. Так, эластичность замещения ресурсов σ , которая является мерой возможности замены труда капиталом и, наоборот, для функции Кобба-Дугласа всегда равна единице. Данное ограничение считается очень жестким, часто не отвечающим реальной экономической действительности.

В этом плане *CES-функция* имеет явное преимущество по сравнению с функцией Кобба-Дугласа: величина σ для нее может принимать любые значения. Для ПФ (2) эластичность замещения ресурсов равна $\sigma = 1/(1 + \beta)$, хотя, так же, как и в функции Кобба-Дугласа, σ является постоянной величиной, что следует из самого ее

названия. При $\beta \rightarrow 0$ $\sigma \rightarrow 1$ и происходит переход от ПФ (2) к ПФ (1). Следовательно, можно говорить, что *CES*-функция обобщает ПФ Кобба-Дугласа.

Кроме того, есть еще один веский аргумент в пользу выбора в качестве инструмента экономического анализа именно ПФ (2). Легко показать, что характер зависимости производительности труда (Y/L) от фондовооруженности (K/L) в рамках данных ПФ довольно разный. Для функции Кобба-Дугласа при $K/L \rightarrow \infty$ для любых допустимых значениях параметров A_0 , δ , θ производительность труда также стремится в бесконечность. А *CES*-функция при произвольных значениях параметров A , α , β , γ и $K/L \rightarrow \infty$ имеет верхний предел $(Y/L)_0$ (рис. 1).

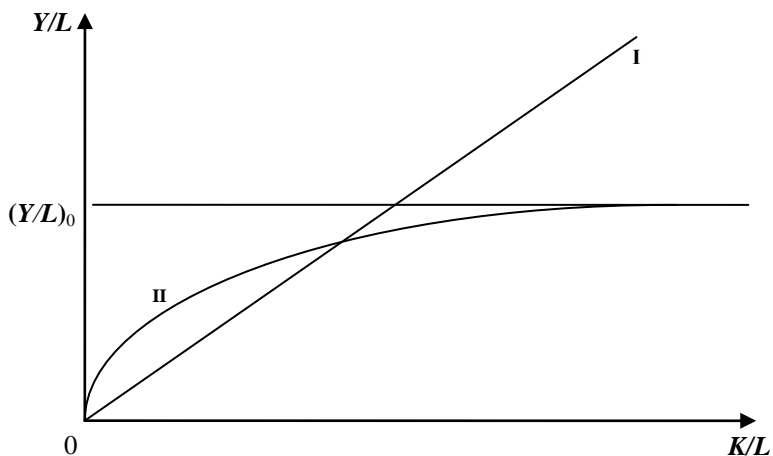


Рис. 1. Графики зависимости производительности труда от фондовооруженности в рамках ПФ Кобба-Дугласа (I) и *CES*-функции (II)

Считается, что ограниченность производительности труда в зависимости от фондовооруженности в рамках ПФ (2) является одним из преимуществ ее применения в экономических исследованиях по сравнению с ПФ (1). Хотя для отечественной промышленности экономическая ситуация, когда $K/L \rightarrow \infty$, является скорее абстрактно-гипотетической, чем реальной.

Казалось бы, что по всем статьям преимущество на стороне CES-функции и ее следует применять в экономических исследованиях производственной деятельности. Однако есть одно но – это проблема, связанная с вычислением неизвестных параметров CES-функции. Дело в том, что формула (2), в отличие от ПФ Кобба-Дугласа, даже после логарифмического преобразования остается нелинейной. Поэтому непосредственное оценивание неизвестных параметров A , α , β , γ обуславливает применение нелинейных методов и, в частности, нелинейного программирования, а также других математических приемов. Указанное обстоятельство требует наличия соответствующего программного обеспечения, что, как правило, вызывает дополнительные трудности при использовании CES-функции на практике.

В связи с этим возникает вопрос: существуют ли объективные критерии, позволяющие принимать обоснованный выбор между ПФ (1) и (2), или же следует отдать предпочтение более простой, доступной и легко экономически интерпретируемой функции Кобба-Дугласа?

Анализ последних исследований и публикаций. М.В. Казакова в ходе анализа свойств ПФ Кобба-Дугласа показала, что доля вознаграждения фактора в общем объеме номинального выпуска продукции постоянна и равна факторной эластичности δ , θ . Данный результат нередко применяют для оценки этих неизвестных параметров. Также его можно использовать для первичного анализа данных: если доля вознаграждения фактора в общем объеме выпуска примерно постоянна, соответствующий производственный процесс можно описать с помощью ПФ Кобба-Дугласа [4].

На наш взгляд, данный критерий носит скорее эмпирический, субъективный характер и вряд ли может застраховать исследователя от ошибок при выборе между ПФ (1) и (2).

Р. Винн, К. Холден при решении данной проблемы рекомендуют либо проверять условия максимизации прибыли при выполнении гипотезы совершенной конкуренции и убывающей эффективности на рынке изучаемой продукции, либо пытаться аппроксимировать CES-функцию. Они выводят числовые значения параметров ПФ (1) и (2), позволяющие сделать правильный выбор между ними [5, с. 82-83].

Мы считаем, что выдвигаемые предпосылки в реальной действительности чаще всего не выполняются, поскольку совершенная конкуренция является скорее эталоном рыночной экономики, довольно далеким от современного состояния отношений товаропроизводителей в сфере отечественного материального производства.

По нашему мнению, более конструктивным представляется подход к аппроксимации *CES*-функции, предложенный Дж. Кментой. Он основан на ее логарифмировании и разложении в ряд Тейлора с последующим применением к полученной приближенной модели корреляционно-регрессионного анализа [6].

М. Кубинива и др. используя подход Кменты в качестве метода нахождения первоначальной оценки параметров *CES*-функции, разработали процедуру отыскания решения поставленной задачи с заданной точностью на базе применения итеративного алгоритма минимизации целевой функции остатков модели по методу Марквардта, который нашел свое воплощение в программе MACRO6, написанной на языке Бейсик [7]. Авторы данной статьи адаптировали указанное программное обеспечение с помощью соответствующего макроса редактора Excel.

Нерешенные ранее части общей проблемы. Расценивая позитивно методы Кменты, Кубинивы и др., мы считаем, что при выборе между ПФ (1) и (2) совершенно не учтен вероятностно-статистический аспект рассматриваемой задачи. В частности, возможен вариант предварительного определения пригодности именно ПФ Кобба-Дугласа для целей моделирования исследуемых производственных процессов с обоснованным отказом от соответствующего программного обеспечения, которое обязательно необходимо при использовании *CES*-функции.

Цели статьи заключаются в обсуждении вероятностно-статистического аспекта выбора между ПФ (1) и (2) с применением элементов теории статистических критериев – проверки статистических гипотез, мощности *t*-критерия Стьюдента, необходимого объема выборки и др.

Изложение основного материала исследования. Следуя Кменте [6], поделим левую и правую часть выражения (2) на *L*, преобразуя его к виду:

$$Y/L = AL^{\gamma-1} [a(K/L)^{-\beta} + (1-a)]^{-\frac{\gamma}{\beta}}. \quad (3)$$

Такой переход привлекателен тем, что двухфакторная модель (2) превращается в однофакторную (парную) с автоматическим устранением коллинеарности производственных переменных K и L . Это всегда позитивно отражается на точности оценки неизвестных параметров модели, поскольку факторы K и L коррелированы вследствие того, что они оба косвенно отражают размер предприятия.

Прологарифмировав (3), получим

$$\ln(Y/L) = \ln A + (\gamma - 1)\ln L - (\gamma/\beta)f(\beta), \quad (4)$$

$$\text{где } f(\beta) = \ln[a(K/L)^{-\beta} + (1-a)].$$

Функция $f(\beta)$ в окрестностях точки $\beta = 0$ раскладывается в ряд Тейлора:

$$f(\beta) = f(0) + \beta f'(0) + (\beta^2/2!) f''(0) + \dots \quad (5)$$

Определив далее значения $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, можно вывести приближенное выражение для $f(\beta)$:

$$f(\beta) \approx -\beta(1-a)\ln(K/L) + (\beta^2/2)a(1-a)[\ln(K/L)]^2. \quad (6)$$

Следовательно, выражение (4) представляется так:

$$\ln(Y/L) \approx \ln A + (\gamma-1)\ln L + \gamma(1-a)\ln(K/L) - 0,5\beta a \gamma(1-a)[\ln(K/L)]^2. \quad (7)$$

Введем следующие обозначения: $\ln(Y/L) = (Y/L)'$; $\ln A = A'$; $(\gamma - 1) = B$; $\ln L = L'$; $\gamma(1-a) = C$; $\ln(K/L) = (K/L)'$; $0,5\beta a \gamma(1-a) = D$.

Тогда формулу (7) запишется так:

$$(Y/L)' \approx A' + BL' + C(K/L)' - D[(K/L)']^2. \quad (8)$$

В выражении (8) величины $(Y/L)'$, L' , $(K/L)'$ являются известными переменными, например, для пространственной выборки – значения логарифмов производительности труда, фонда заработной

платы, фондовооруженности по отдельным предприятиям, а для временной выборки – значения этих же экономических показателей для одного и того же предприятия за разные периоды времени. Параметры A' , B , C , D являются неизвестными коэффициентами регрессии, которые можно оценить по обычному методу наименьших квадратов, рассматривая уравнение (8) как некоторую регрессионную модель CES-функции, описывающую корреляционную зависимость результативного признака $(Y/L)'$ от факторов L' и $(K/L)'$.

Уравнение, аналогичное (7), можно вывести и для ПФ Кобба-Дугласа:

$$\ln(Y/L) = \ln A_0 + (\theta - 1 + \delta)\ln L + \delta\ln(K/L). \quad (9)$$

Обозначим $\ln A_0 = A_0'$; $(\theta - 1 + \delta) = E$.

Тогда модель (9) примет вид:

$$(Y/L)' = A_0' + EL' + \delta(K/L)'. \quad (10)$$

Сравнение выражений (8) и (10) показывает, что по сути различия между CES-функцией и ПФ Кобба-Дугласа сводятся лишь к одному дополнительному слагаемому, стоящему в правой части уравнения (8). При $\beta = 0$ $D = 0$ и эти функции полностью совпадают, т.е. происходит переход от ПФ (2) к ПФ (1). Следовательно, оценка коэффициента D в модели (8), а точнее, проверка его статистической надежности (значимости) с помощью t -критерия Стьюдента может служить базой для выбора конкретной формы из двух рассматриваемых ПФ. Подробнее с процедурой проверки статистических гипотез можно ознакомиться в работах [8; 9, с. 127-131] (см. блок-схему на рис. 2).

Приведенные выше рассуждения справедливы в той ситуации, когда оба уравнения регрессии (8) и (10) являются статистически надежными, значимыми по F -критерию Фишера, т.е. нулевая гипотеза $H_0 : R^2 = 0$ против альтернативы $H_A : R^2 > 0$ для них отклоняется (R^2 – коэффициент детерминации уравнений (8), (10)). В противном случае (нулевая гипотеза $H_0 : R^2 = 0$ против альтернативы $H_0 : R^2 > 0$ не отклоняется для обеих уравнений) следует вообще отказаться от моделирования или попытаться расширить информационную базу исследования за счет новых наблюдений.

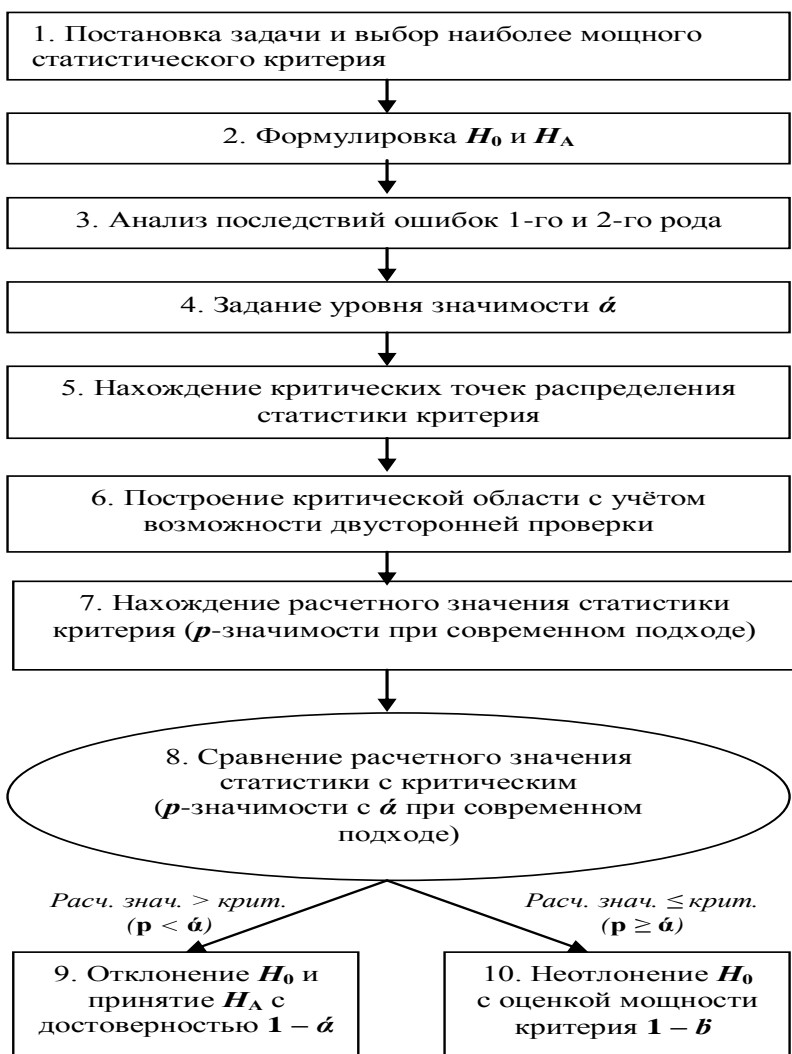


Рис. 2. Блок-схема процедуры проверки статистических гипотез

Пусть оба уравнения регрессии (8) и (10) являются статистически надежными, значимыми по F-критерию Фишера. Тогда можно переходить к решению поставленной задачи с помощью t-

критерия Стьюдента. Если коэффициент D оказывается статистически значимым (нулевая гипотеза $H_0 : D = 0$ против альтернативы $H_A : D \neq 0$ отклоняется), то приходим к выводу о том, что в проводимом экономическом исследовании необходимо использовать CES-функцию. Достоверность такого вывода составляет $1 - \alpha$, где α – уровень значимости, который задается исследователем и выбирается обычно среди малых значений ($\alpha = 0,05; 0,01; 0,005$). Величина α характеризует вероятность ошибки 1-го рода – отклонить нулевую гипотезу H_0 , когда она верна.

В противном случае, когда нулевая гипотеза $H_0 : D = 0$ против альтернативы $H_0 : D \neq 0$ не отклоняется, следует отдать предпочтение ПФ Кобба-Дугласа. При этом вероятность правильности указанного вывода равняется мощности статистического критерия $1 - \beta$, где β – вероятность ошибки 2-го рода – не отклонить нулевую гипотезу H_0 , когда верна альтернатива H_A .

Следует иметь в виду, что расчетное значение t-критерия Стьюдента определяется отношением D / S_D , где S_D – стандартная ошибка коэффициента регрессии D . Поскольку $D = 0,5\beta a\gamma(1 - a)$ и максимальное значение произведения $0,5a(1 - a)$ равно $0,125$ при $a = 0,5$, т.е. когда производственные факторы K и L равновесны, то в условиях линейной однородности CES-функции ($\gamma = 1$) выполняется неравенство $D \leq 0,125\beta$. Ясно, что отклонение нулевой гипотезы будет происходить только при высоких значениях коэффициента регрессии D , когда параметр β ПФ (2) достаточно велик ($\beta \neq 0$).

При неотклонении H_0 возникает вопрос: как определить мощность статистического критерия $1 - \beta$, в данном случае мощность t-критерия Стьюдента. Часто мощность путают с вероятностью $1 - \alpha$, однако, вообще говоря, $1 - \beta \neq 1 - \alpha$, т.к. величины α и β связаны между собою обратно пропорциональной зависимостью. Следовательно, вероятности $1 - \beta$ и $1 - \alpha$ связаны аналогично. Кроме того, известно, что на мощность критерия существенно влияют также и другие факторы.

Так, на величину $1 - \beta$ воздействует характеристика альтернативной гипотезы $\varphi = H_A - H_0$, которая отражает различия между нулевой и альтернативной гипотезами. По определению, мощность – это вероятность отклонить H_0 , когда верна H_A . Мощность характеризует чувствительность критерия, его способность

улавливать различия между нулевой и альтернативной гипотезами. Имеется прямая связь между $1 - \hat{b}$ и величиной φ . Для значений φ , близких к нулю, мощность критерия невысока: ему трудно улавливать малые различия между гипотезами и ошибка 2-го рода допускается часто. При $\varphi \rightarrow \max \varphi$ $(1 - \hat{b}) \rightarrow \max (1 - \hat{b})$.

Третьим важным фактором, определяющим величину $1 - \hat{b}$, является число степеней свободы критерия $k = N - m - 1$, которое при проведении корреляционно-регрессионного анализа зависит от объема статистических наблюдений N и числа оцениваемых параметров модели m . Для преобразованной ПФ Кобба-Дугласа (10) $m = 3$, а для преобразованной CES-функции (8) $m = 4$. В соответствии с законом больших чисел при $N(k) \rightarrow \infty$ мощность $1 - \hat{b} \rightarrow 1$. При $m \rightarrow N$ $k \rightarrow 0$ и $1 - \hat{b} \rightarrow \hat{\alpha}$. Иными словами, обоснованное отклонение нулевой гипотезы будет происходить не только при высоких значениях коэффициента регрессии D , когда параметр β ПФ (2) достаточно велик, но также и при большом объеме наблюдений ($N > 20$).

Следует иметь в виду, что оба рассмотренных параметра (φ , k) могут выступать как заданными, так и расчетными показателями статистического критерия. Дело в том, что взаимосвязь параметров статистического критерия выражается в виде функции мощности. Для сложной альтернативной гипотезы эта функция является непрерывной, монотонно возрастающей функцией от $\hat{\alpha}$, φ , k . Функция мощности задаётся обычно в виде графиков, построенных для так называемых нецентральных F- и t-распределений, т.е. распределений статистики критерия в условиях справедливости альтернативной гипотезы (см. подробнее в работах [8; 10]).

Однако, даже не прибегая к использованию функции и графиков мощности статистических критериев, можно дать следующую рекомендацию по оценке $1 - \hat{b}$: малый объем выборки ($N < 30$) обычно указывает на низкий уровень мощности критерия и, наоборот. Этот простой, хотя и приближенный метод оценки $1 - \hat{b}$ достаточно хорошо зарекомендовал себя в практике моделирования выпуска продукции с использованием ПФ.

Пусть оба уравнения регрессии (8) и (10) оказались статистически надежными, значимыми по F-критерию Фишера и нулевая гипотеза $H_0 : D = 0$ против альтернативы $H_A : D \neq 0$ отклонена с помощью t-критерия Стьюдента с достаточно высокой

достоверностью, например, $1 - \alpha = 0,95$. Тогда возникает вопрос: как определить неизвестные параметры CES-функции (2)?

Исходя из найденных коэффициентов регрессии (8) A' , B , C , D и принятых под формулой (7) обозначений, получаем следующие приближенные значения искомым коэффициентов ПФ (2):

$$\begin{aligned} A &= \exp A'; \quad \gamma = B + 1; \quad a = 1 - C/(B + 1); \\ \beta &= 2D(B + 1)/C(B + 1 - C). \end{aligned} \quad (11)$$

Их можно использовать как в качестве конечного приближенного решения задачи оценки неизвестных параметров CES-функции, так и в роли начального решения в итеративной процедуре нелинейного метода наименьших квадратов, основанной на алгоритме минимизации целевой функции остатков модели по методу Марквардта [7, с. 137-149].

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Результаты проведенного сравнительного анализа ПФ (1) и (2) показали, что существуют довольно веские аргументы в пользу применения CES-функции в ходе моделирования зависимости выпуска продукции предприятий от агрегированных производственных факторов «капитал» и «труд». Это, прежде всего, отказ от постулата для ПФ Кобба-Дугласа о том, что эластичность замещения ресурсов равна $\sigma = 1$. Кроме того, ограниченность производительности труда в зависимости от фондовооруженности в рамках ПФ (2) также является одним из преимуществ ее применения в экономических исследованиях по сравнению с ПФ (1).

Однако, необходимость применения нелинейных методов и других специальных математических приемов оценивания неизвестных параметров CES-функции с использованием соответствующего программного обеспечения, как правило, вызывает на практике дополнительные и зачастую непреодолимые трудности. Поэтому предварительная оценка значимости коэффициента регрессии D в модели (8) представляет собой полезный этап обоснования выбора адекватной математической формы функции, базирующийся на применении элементов теории статистических критериев.

Дальнейшие перспективы исследований в данной сфере и практического расширения использования CES-функции в экономическом анализе производства мы видим в следующих основных направлениях:

- разработка современного программного обеспечения расчета ее параметров;
- понимание широким кругом исследователей ее преимуществ по сравнению с традиционной ПФ Кобба-Дугласа.

Литература

1. Клейнер Г. Б. Производственные функции : теория, методы, применение / Г. Б. Клейнер. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.
2. Вітлінський В. В. Моделювання економіки : Навч. посібник / В. В. Вітлінський. – К. : КНЕУ, 2003. – 408 с.
3. Производственные функции [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://i.kpi.ua/podladchikov/-menu=micro-firm-2-.htm>
4. Казакова М. В. Анализ свойств производственных функций, используемых при декомпозиции экономического роста / М. В. Казакова [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <ftp://ftp.repec.org/opt/ReDIF/RePEc/rnp/wpaper/31.pdf>
5. Винн Р., Холден К. Введение в прикладной эконометрический анализ / Р. Винн, К. Холден. Пер. с англ. С. А. Николаенко. – М. : Финансы и статистика, 1981. – 294 с.
6. Kementa J. (1967). On Estimation of the CES Production Function. *International Economic Review*, vol. 8, p. 180-189.
7. Математическая экономика на персональном компьютере : Пер. с япон. / М. Кубинива, М. Табата, С. Табата, Ю. Хасэбэ; под ред. М. Кубонива. – М. : Финансы и статистика, 1991. – 304 с.
8. Головач А. В. Критерии математической статистики в экономических исследованиях / А. В. Головач, А. М. Ерина, В. М. Трофимов. – М. : Статистика, 1973. – 136 с.
9. Янковой А. Г. Основы эконометрического моделирования / А. Г. Янковой. – Одесса, ОГЭУ, ротапринт, 2006. – 133 с.
10. Шеффе Г. Дисперсионный анализ / Г. Шеффе. Пер. с англ. – М. : Наука, 1980. – 512 с.

1. Kleynер Н. В. Proyzvodstvennyye funktsyy : teoryya, metody, prymenenye / Н. В. Kleynер. – М.: Fynansы y statystyka, 1986. – 239 s.
2. Vitlins'kyу V. V. Modelyuvannya ekonomiky : Navch. posibnyk / V. V. Vitlins'kyу. – К. : KNEU, 2003. – 408 s.
3. Proyzvodstvennyye funktsyy [Электронныу resurs]. – Rezhym dostupa: <http://i.kpi.ua/podladchikov/-menu=micro-firm-2-.htm>
4. Kazakova M. V. Analyz svoystv proyzvodstvennykh funktsyy, uspol'zuemыkh pry dekompozitsyy ekonomыcheskoho rosta / M. V. Kazakova [Электронныу resurs]. – Rezhym dostupa: <ftp://ftp.repec.org/opt/ReDIF/RePEc/rnp/wpaper/31.pdf>
5. Vynn R., Kholden K. Vvedenye v prykladnoy ekonometrycheskyyu analiz / R. Vynn, K. Kholden. Per. s anhl. S. A. Nykolaenko. – М. : Fynansы y statystyka, 1981. – 294 s.
6. Kementa J. (1967). On Estimation of the CES Production Function. International Economic Review, vol. 8, p. 180-189.
7. Matematycheskaya ekonomыka na personal'nom komp'yutere : Per. s yaron. / M. Kubonyva, M. Tabata, S. Tabata, Yu. Khasэbэ; pod red. M. Kubonyva. – М. : Fynansы y statystyka, 1991. – 304 s.
8. Holovach A. V. Kryteryу matematycheskoy statystyky v ekonomыcheskykh yssledovanyyakh / A. V. Holovach, A. M. Eryna, V. M. Trofymov. – М. : Statystyka, 1973. – 136 s.
9. Yankovoy A. H. Osnovy ekonometrycheskoho modelyrovannya / A. H. Yankovoy. – Odessa, OHЭU, rotaprynt, 2006. – 133 s.
10. Sheffe H. Dyspersyonnyу analiz / H. Sheffe. Per. s anhl. – М. : Nauka, 1980. – 512 s.

Рецензент: Ковалев А.І., д.е.н., професор, проректор з наукової роботи Одеського національного економічного університету
 11.01.2016.