5. Riven' bezrobittya naselennya (za metodolohiyeyu MOP) za rehionamy // Derzhavna sluzhba statystyky Ukrayiny, 2016. [Elektronnyy resurs] – Rezhym dostupu: http://www.ukrstat.gov.ua/

Рецензент: *Балджи М .Д., д.е.н., професор, зав. кафедри економіки та управління національним господарством Одеського національного економічного університету*

27.07.2016

УДК 330.4:336

Юзьв'як Олег

ОЦІНЮВАННЯ VAR ПОРТФЕЛЯ АКТИВІВ НА ОСНОВІ ПАРАМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

У статті проведено аналіз існуючих параметричних моделей оцінювання VaR портфеля активів щодо їх чутливості до типу портфеля активів та рівня волатильності його характеристик. Показано, що параметричний підхід до оцінювання VaR є доволі інформативним та гнучким, оскільки дозволяє оцінювати як цілий портфель, так і окремі його активи. Відзначено, що VaR методологія представляє інформацію у зручному та інтуїтивно зрозумілому форматі і, крім цього, параметричні моделі не потребують великої кількості припущень щодо типу розподілу параметрів моделі. Показано, що до недоліків параметричних моделей можна віднести їх значну залежність від цих припущень. Не коректний вибір типу розподілу може спричинити серйозні похибки при оцінюванні VaR. Це обумовлює потребу в коректному виборі обмежень, які накладаються на змінну P/L. У статті показано, що якщо розподіл дохідностей має важкі хвости, тоді використовувати нормальний розподіл не доцільно. При нормальному розподілі P/L або дохідність можуть приймати довільні значення і у результаті можуть виникнути втрати більші на наявний капітал: можна втратити більше ніж наші сукупні інвестиції. У роботі відзначається, що оскільки дохідності у більшості випадків

мають надлишковий ексцес та товстіші від звичайних хвости розподілу, у результаті VaR активу чи портфеля при нормальному розподілі буде серйозно недооціненим у випадку важких хвостів та використанні нормального розподілу. Автором відзначається, що використання нормального розподілу на основі центральної граничної теореми буде коректним лише у випадку ймовірностей чи квантилів, близьких до центру. Замість нормального розподілу у цьому випадку слід скористатись одним із вище згаданих розподілів із товстими хвостами та враховувати позицію активу довгу чи коротку. У статті наголошується, що у випадку, коли необхідно оцінити VaR на дуже великих рівнях довіри, необхідно скористатись теорією екстремальних значень та віддати перевагу GEV чи EV підходам.

Ключові слова: VaR портфеля, параметрична модель, розподіл Гумбеля, логнормальний розподіл, t-розподіл Стьюдента, геометрична дохідність.

Юзьвяк Олег

ОЦЕНКА VAR ПОРТФЕЛЯ АКТИВОВ НА С ПОМОЩЬЮ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В статье проведен анализ существующих параметрических моделей оценки VaR портфеля активов относительно их чувствительности к типу портфеля активов и уровня волатильности его характеристик. Показано, что параметрический подход к оценке VaR довольно есть информативным и гибким, поскольку позволяет оценивать как целый портфель, так и отдельные его активы. Отмечено, что VaR методология представляет информацию в удобном и интуитивно понятном формате и, кроме этого, параметрические модели не требуют большого количества предположений относительно типа распределения параметров модели. Показано, что к недостаткам параметрических моделей можно отнести их значительную зависимость от этих предположений. Злонамеренного выбор типа распределения может вызвать серьезные погрешности при оценке VaR. Это обуславливает потребность в корректном выборе ограничений, которые накладываются на переменную P / L. В статье показано, что если распределение доходностей имеет тяжелые хвосты,

тогда использовать нормальное распределение не целесообразно. При нормальном распределении P / L или доходность могут принимать произвольные значения и в результате могут возникнуть потери больше на имеющийся капитал: можно потерять больше чем наши совокупные инвестиции. В работе отмечается, что поскольку доходности в большинстве случаев имеют избыточный эксцесс и толще обычных хвосты распределения, в результате VaR актива или портфеля при нормальном распределении будет серьезно недооцененным в случае тяжелых хвостов и использовании нормального распределения. Автором отмечается, что использование нормального распределения на основе центральной предельной теоремы будет корректным только в случае вероятностей или квантилей, близких к центру. Вместо нормального распределения в этом случае следует воспользоваться одним из вышеупомянутых распределений с толстыми хвостами и учитывать позицию актива - длинную или короткую. В статье отмечается, что в случае, когда необходимо оценить VaR на очень больших уровнях доверия, необходимо воспользоваться теорией экстремальных значений и отдать предпочтение GEV или EV подходам.

Ключевые слова: VaR портфеля, параметрическая модель, распределение Гумбеля, логнормальное распределение, t-распределение Стьюдента, геометрическая доходность.

Yuzv'yak Oleh

EVALUATION OF ASSETS PORTFOLIO VAR ON THE BASE OF PARAMETRIC MODELS

The article analyzes the existing parametric VaR models of portfolio assessment concerning their sensitivity to the type of portfolio assets and the volatility of its characteristics. It is shown that parametric VaR approach is quite informative and flexible because it allows you to evaluate the portfolio as a whole and its individual assets. It is noted that VaR methodology presents information in an easy and intuitive format and, in addition, parametric models do not require a large number of assumptions about the type of parameters distribution. This makes the need for choosing a particular restrictions imposed on the variable P / L. The article shows that if the distribution has heavy tails, then use the normal distribution is not appropriate. In the normal distribution of P / L or return may take any value and as a result there can be losses bigger than on available capital you can lose more than our total investments. It was shown that the return in most cases have excess kurtosis and fatter tails than at normal distribution. As a result VaR of the asset or portfolio for normal distribution is seriously undervalued in the case of heavy tails and using a normal distribution. The author recognizes that the use of normal distribution based on the central limit theorem is valid only for quantile or probability close to the center. Instead of the normal distribution in this case, it is reasonable to use one of the distributions with fat tails and we need to consider asset position - long or short. It is noted in the article that in case we need to estimate VaR at very high levels of confidence necessary it is advisable to use the theory of extreme values and prefer GEV or EV approaches.

***Keywords*:** Portfolio VaR, parametric model, Gumbrl distribution, lognormal distribution, t-Student distribution, geometric return.

Актуальність теми. На сьогодні розроблено багато моделей, які описують коливання числових характеристик різних фінансових інструментів протягом різних проміжків часу. Більшість із них має дуже велике практичне значення, оскільки ці моделі широко використовуються як практиками, так і теоретиками фінансових ринків. Незважаючи на те, що методологія Value-at-Risk (VaR) на сьогодні є однією із найпопулярніших при оцінюванні ринкових ризиків, існує дуже багато критиків її використання у банківській сфері, особливо у нестандартних кризових ситуаціях на фінансових ринках. Головний аргумент - некоректне оцінювання втрат при важких хвостах і при використанні нормального розподілу. Проте останнім часом появилось дуже багато наукових робіт, у яких пропонується низка альтернативних до нормального розподілу підходів, які дають змогу врахувати важкі хвости та особливості структури портфеля, а саме, короткі та довгі позиції активів. Ключова відмінність між цими підходами полягає у використанні різних методів моделювання випадкових шумів (наприклад, нормального розподілу, логнормального розподілу, t-розподілу Стьюдента, розподілу Гумбеля тощо), зберігаючи при цьому однакові методи обчислення VaR. Усе це обумовлює потребу у дослідженні особливостей застосування різних видів розподілу дохідностей у залежності від типу портфеля активів та рівня волатильності його характеристик.

Аналіз останніх наукових досліджень та публікацій. Проблемам оцінювання VaR портфеля активів на основі параметричних моделей присвячено чимало наукових досліджень як вітчизняних, так і західних дослідників, серед яких слід виділити роботи Б. Нгога [1], Р. Хусмана [2], К. Кудійка [2], Р. Поунола [2], П. Ембрехта [3], К. Купельберга [3], Т. Мікоша [3], М. Еванса [4], Н. Гастінгса [4], Б. Пікока [4], К. Довда [5], Б. Кишакевича [6],[7] та інших. Проте проблема врахування важких хвостів розподілів дохідностей активів залишається все ще надзвичайно актуальною, особливо після руйнівних наслідків світової фінансової кризи 2007-2009 років.

Мета статті - аналіз існуючих параметричних моделей оцінювання VaR портфеля активів та виявлення особливостей їх застосування в залежності від типу портфеля активів та рівня волатильності його характеристик.

Виклад основного матеріалу. Ключовим питанням при виборі моделі оцінювання VaR портфеля активів банку є вибір типу розподілу змінної P/L та арифметичних/ геометричних доходностей. Значення змінної P/L у період часу t – P/L_t представляє собою вартість активу або портфеля у момент часу t плюс внутрішні платежі D_t за мінусом вартості активу (портфеля) у момент часу t-1:

$$P/L_t = P_t + D_t - P_{t-1} \ . \qquad (1)$$

Якщо дані подано у формі P/L, тоді додатні значення відповідають доходу а від'ємні–збиткам. Іншими словами має місце рівність:

$$P/L_t = -L/P_t \ . \qquad (2)$$

У подальшому розглядатимемо арифметичну дохідність:

$$r_t = \left(P_t + D_t - P_{t-1}\right)/P_{t-1} \, , \qquad (3)$$

що фактично є значенням змінної P/L у період часу t поділене на вартість активу у момент часу t-1 та геометричну:

$$R_t = \log\left[\left(P_t + D_t\right)/P_{t-1}\right]. \qquad (4)$$

Існує простий взаємозв’язок між цими дохідностями [5, стор. 36]:

$$R_t = \log\left(1 + r_t\right). \qquad (5)$$

Легко бачити, що якщо дохідності є малими, тоді $R_t \approx r_t$. Логічно поставити питання: яку із цих дохідностей слід використовувати? Оскільки при малих дохідностях різниця між ними є незначною, а малі дохідності матимуть місце при аналізі коротких горизонтів часу, тоді при таких умовах доцільно використовувати більш зручніші для конкретного випадку види дохідностей. Проте, слід пам’ятати, що геометричні дохідності мають деякі переваги у порівнянні із арифметичними:

– по-перше, геометрична дохідність є більш підходящою із економічної точки зору, оскільки вона гарантує невід’ємність ціни активу або вартості портфеля, навіть у випадку, коли дохідності є необмеженими. При арифметичній дохідності низька дохідність або великі збитки передбачають від’ємність ціни активу, що само по собі може бути дуже рідко економічно обґрунтовано;

– по-друге, використання геометричної дохідності є більш економічно обґрунтованим для порівняно великих горизонтів часу, оскільки дає змогу врахувати проміжний дохід, тоді як арифметична дохідність вважає його рівним нулю.

Найбільшою популярністю через свою простоту дістав нормальний розподіл, який, крім цього, передбачає застосування нескладних формул для обчислення VaR та ETL. Нормальний розподіл є привабливим також через те, що він має лише два незалежних параметри – середнє значення μ та стандартне відхилення σ. Крім цього, третій момент нормального розподілу – асиметрія рівна нулю. Застосувати припущення про нормальний розподіл можна до змінної P/L або арифметичної дохідності. Формули для VaR та ETL у цьому випадку дещо відрізнятимуться. Так, якщо припустити нормальність P/L, тоді вони матимуть вигляд відповідно:

$$VaR = -\alpha_{cl}\sigma_{P/L} - \mu_{P/L} \quad , \qquad (6)$$

$$ETL = \sigma_{P/L}\phi(-\alpha_{cl})/F(\alpha_{cl}) - m,_{P/L} \quad . \qquad (7)$$

Якщо, припустити, що арифметична дохідність розподілена нормально, тоді вони дещо зміняться:

$$VaR = (-\alpha\sigma_r - \mu_r)P\,, \qquad (8)$$

де P – поточна ціна активу. Ще однією привабливістю нормального розподілу є існування для методів найменших квадратів об’єктивних лінійних оцінок параметрів нормального розподілу.

Якщо визначити $\sigma_{P/L}$ та $\mu_{P/L}$ за певний період часу, тоді формули для оцінювання VaR та ETL за h таких періодів матимуть вигляд:

$$VaR(h, cl) = -\alpha_{cl}\sqrt{h}\sigma_{P/L} - h\mu_{P/L} \quad . \qquad (9)$$

$$ETL(h, cl) = \sqrt{h}\sigma_{P/L}\phi(-\alpha_{cl})/F(\alpha_{cl}) - h\mu,_{P/L}\,. \qquad (10)$$

Проте припущення про нормальність P/L чи дохідності має чимало недоліків:

• по-перше, P/L або дохідність можуть приймати довільні значення. У результаті можуть виникнути втрати більші на наявний капітал: можна втратити більше ніж наші сукупні інвестиції;

• по-друге, при застосуванні припущення про нормальність як правило апелюють до центральної граничної теореми. Проте ця теорема стосується лише центру маси функції щільності, а не її екстремальних значень. Це означає, що ми можемо обґрунтувати використання нормального розподілу на основі центральної граничної теореми лише у випадку ймовірностей чи квантилів, близьких до центру. Коли ми маємо справу із екстремальними значеннями (у випадку дуже великого чи малого довірчого інтервалу), тоді центральна гранична теорема не може бути використана;

• по-третє, як показує практика, дохідності у більшості випадків мають надлишковий ексцес та товстіші від звичайних хвости розподілу. У результаті VaR активу чи портфеля при нормальному розподілі буде серйозно недооціненим у випадку важких хвостів та використанні нормального розподілу.

Припустимо, що геометрична дохідність є нормально розподілена із середнім μ_R та стандартним відхиленням σ_R і $D_t = 0$ (реінвестування у активи є безперервним). У такому випадку натуральний логарифм від P_t буде нормально розподіленим, а саме розподіл P_t буде логнормальним і для обчислення VaR можна скористатись формулою:

$$VaR = P_{t-1} - \exp\left(h\mu_R + \alpha_{cl}\sqrt{h}\sigma_R + \log P_{t-1}\right), \qquad (11)$$

де P_{t-1} – поточна вартість активу або портфеля. Формула для логнормального VaR є більш складнішою ніж для нормального VaR, проте логнормальність має низку переваг, серед яких виключення можливості від’ємних значень вартості активів. Наступним аргументом на користь логнормального розподілу є можливість врахування асиметричності експозицій коротких та довгих позицій при моделюванні асиметричних P/L чи дохідностей. Довгі позиції генеруватимуть втрати при падінні ринку, тоді як короткі зазнаватимуть втрат при зростанні ринку. Врахувати таку відмінність у поведінці коротких та довиx позицій використовуючи симетричні розподіли неможливо, оскільки VaR в обох випадках буде взаємним дзеркальним відображенням.

Використовуючи асиметричні розподіли, такі як логнормальний, можна врахувати особливості довгих та коротких позицій (див. рис. 2). Так, довга позиція зазнає збитків коли ринок падає, проте таке падіння ціни активу обмежене обсягом початкової інвестиції. Інвестиція 1 у.о. як довга позиція, матиме VaR рівним 0.807. Проте відповідна коротка позиція 1 у.о. матиме VaR рівним 4.180. Фактично коротка позиція має необмежений VaR і довгий правий хвіст розподілу, який продукує дуже високі прибутки для довгих позицій та дуже високі збитки для коротких. На рис 2. зображено логнормальний VaR для $\sigma_R = 1$, $P_{t-1} = 1$, $\mu_R = 0$. У цьому випадку VaR для довірчого рівня $cl = 95\%$ становитиме 0,807.

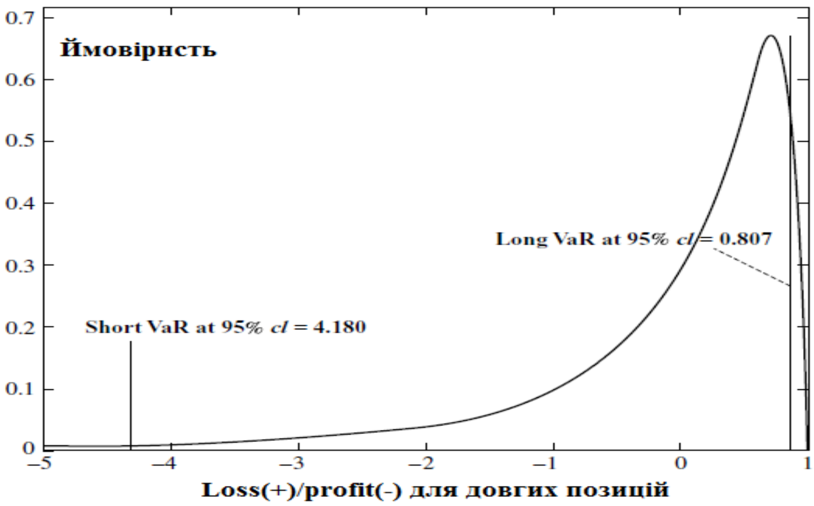

Рис. 2. VaR для логнормально розподілених даними втрати/дохід

Іншими словами, припущення про логнормальність має свою привабливість стосовно врахування обмеження на максимальні втрати для довгих позицій. Крім цього, логнормальність є сумісною із геометричним Броунівським рухом - процесом, який сьогодні став дуже ефективним інструментом моделювання ціни активів та використовується теоретиками та практиками при оцінюванні деривативів. Проте воно має теж певні недоліки, серед яких, найбільш серйозним є некоректне моделювання геометричної дохідності товстими хвостами, що робить логнормальний розподіл не ефективним для оцінювання VaR та ETL при екстремальних рівнях довіри.

Для врахування важких хвостів при оцінюванні VaR часто використовують t-розподіл Стьюдента. Вперше такий підхід було використано Р. Хусманом у роботі [2]. Аналогічно до нормального розподілу t-розподіл Стьюдента є симетричним та колоколоподібним, проте має важчі хвости, а отже, має здатність набувати значень значно більших від середнього. Це робить його корисним для розуміння статистичної поведінки деякого типу співвідношень випадкових величин, у яких знаменник може приймати близькі до нуля значення. t-розподіл Стьюдента із v ступенями свободи має ексцес

$3(v-2)/(v-4)$, при умові $v \geq 5$. Змінюючи v можна отримати різні значення ексцесу. Якщо необхідно отримати великі значення ексцесу, v повинно бути порівняно малим, тоді як для незначного ексцесу навпаки, слід розглядати великі значення v. Це робить t-розподіл Стьюдента доволі гнучким інструментом для аналізу ринкових ризиків. VaR у цьому випадку можна буде отримати за формулою:

$$VaR(h,cl) = -\alpha_{cl}\sqrt{h}\sqrt{(v-2)/v}\,\sigma_{P/L} - h\mu_{P/L}\,. \qquad (12)$$

Якщо стоїть завдання оцінити VaR та ETL при екстремальних значеннях рівня значущості, тоді доцільно буде використати розподіл екстремальних значень. Теорія екстремальних значень пропонує два підходи. Одним із них є узагальнений розподіл екстремальних значень (GEV distribution). В основу цього підходу покладено відому теорему Фішера-Тіпета, згідно із якою, якщо X має функцію розподілу $F(X)$, тоді функція розподілу екстремальних значень X асимптотично збігається до GEV функції розподілу:

$$H_{\xi,a,b} = \begin{cases} \exp\left(-\left(1+\xi(x-a)/b\right)^{-1/\xi}\right), & \text{якщо } \xi \neq 0 \\ \exp\left(-\exp\left(-(x-a)/b\right)\right), & \text{якщо } \xi = 0 \end{cases}, \qquad (13)$$

де $1+\xi(x-a)/b > 0$, a і b – параметри розміщення та масштабу, ξ – хвостовий індекс. Зазвичай використовують два основних види цього розподілу: розподіл Гумбеля (якщо $\xi = 0$) та розподіл Фреше (якщо $\xi > 0$). VaR Гумбеля та Фреше матиме вигляд [3, стор. 324], [4,стор. 86]:

$$VaR = \begin{cases} a - (b/\xi)\left[1-(-\log cl)^{-\xi}\right], & \text{якщо } \xi > 0 \\ a - b\log\left(\log(1/cl)\right), & \text{якщо } \xi = 0 \end{cases}. \qquad (14)$$

При оцінюванні VaR на основі розподілу Гумбеля слід перш за все визначитись який хвіст слід брати до уваги: верхній чи нижній. Це залежатиме від короткої чи довгої позиції активу. Крім цього, на форму поверхні VaR суттєвим чином впливатиме середнє значення. Наприклад, при застосуванні розподілу Гумбеля до P/L із додатнім середнім ми отримаємо поверхню VaR Гумбеля як показано на рис.3.

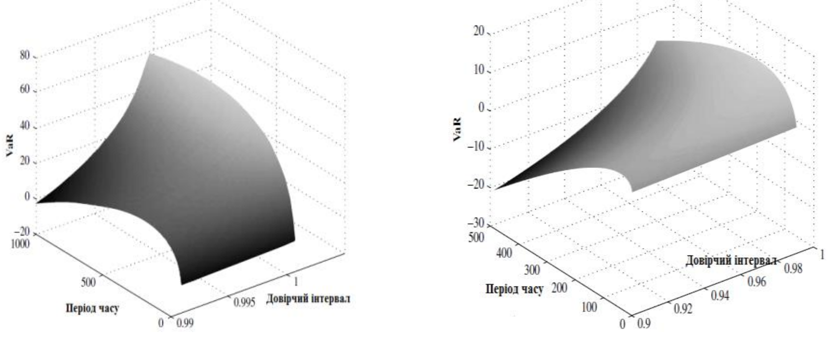

Рис. 3. Поверхня Gumbel VaR Рис. 4. Поверхня нормального VaR

Легко бачити, що ця поверхня нагадує поверхню VaR для нормального розподілу із додатнім середнім (рис.4), що має просте пояснення - із збільшенням аналізованого періоду середнє значення відіграє все більше значення при оцінюванні VaR, а саме тягне його до низу. Проте, при рівності нулю середнього значення ми отримаємо поверхню Gumbel VaR, на якій VaR продовжує зростати із збільшенням горизонту аналізу.

Висновки. Таким чином, параметричний підхід до оцінювання VaR є інформативним та гнучким методом, оскільки може застосовуватись як до цілого портфеля, так і до окремих його активів і подає інформацію у зручному та інтуїтивно зрозумілому форматі. Крім цього, параметричні моделі не потребують великої кількості припущень щодо типу розподілу параметрів моделі. Проте, до недоліків параметричних моделей можна віднести їх значну залежність від цих припущень, що може спричинити серйозні похибки при не коректному виборі типу розподілу. Це обумовлює важливість коректного вибору обмежень, які накладаються на змінну P/L. Якщо розподіл дохідностей має важкі хвости, тоді використовувати нормальний розподіл не доцільно, оскільки використання нормального розподілу на основі центральної граничної теореми буде коректним лише у випадку ймовірностей чи квантилів, які є близькими до центру. Замість нормального розподілу у цьому випадку слід скористатись одним із вище згаданих розподілів із товстими хвостами та врахувати позицію активу - довгу чи коротку.

У випадку, коли необхідно оцінити VaR на дуже великих рівнях довіри, необхідно скористатись теорією екстремальних значень та віддати перевагу GEV чи EV підходам.

Література

1. Ngoga B. Value at Risk Estimation A GARCH-EVT-Copula Approach [Електронний ресурс] // Ngoga Kirabo Bob / Mathematical Statistics Stockholm University Master Thesis/ October 2013. Режим доступу: http://www.math.su.se

2. Huisman, R. VaR: Fat tails in financial risk management./ Huisman, R., Koedijk, K., Pownall, R. /Journal of Risk.– №1,1998. – p. 47–61.

3. Embrechts, P. Modelling Extreme Events for Insurance and Finance // Embrechts, P., C. Kuppelberg and T. Mikosch/ Berlin: Springer-Verlag. – 1997.– 125 p.

4. Evans, M. Statistical Distributions. Third edition // Evans, M., N. Hastings and B. Peacock/ Chichester and New York: JohnWiley and Sons.–2000.- 245 p.

5. Kevin Dowd. An Introduction to Market Risk Measurement / JOHN WILEY & SONS, LTD.- August 2002.- 304 p.

6. Кишакевич, Б.Ю. Використання коваріаційної моделі для обчислення VAR портфеля / Б.Ю. Кишакевич // Науковий вісник Національного лісотехнічного університету України: Збірник науково – технічних праць. – Львів: НЛТУ України. – 2008. – Вип. 18.10.– С. 297 – 302.

7. Кишакевич, Б.Ю. Проблема вибору мір ризику в контексті світової фінансової кризи / Б.Ю. Кишакевич // Науковий вісник Національного лісотехнічного університету України: Збірник науково – технічних праць. - Львів: НЛТУ України. – 2010. – Вип. 20.2. – С. 178 – 186.

6. Kyshakevych, B.Yu. Vykorystannya kovariacijnoyi modeli dlya obchyslennya VAR portfelya / B.Yu. Kyshakevych // Naukovyj visnyk Nacionalnogo lisotexnichnogo universytetu Ukrayiny: Zbirnyk naukovo – texnichnyx pracz. − Lviv: NLTU Ukrayiny. – 2008. – Vyp. 18.10. − S. 297 – 302.

7. Kyshakevych, B.Yu. Problema vy`boru mir ryzyku v konteksti

svitovoyi finansovoyi kryzy / B.Yu. Kyshakevych // Naukovyj visnyk Nacionalnogo lisotexnichnogo universytetu Ukrayiny: Zbirnyk naukovo – texnichnyx pracz. - Lviv: NLTU Ukrayiny. – 2010. – Vyp. 20.2. – S. 178 – 186

Рецензент: *Кишакевич Б.Ю., д.е.н., професор, зав. кафедри економічної кібернетики та інноватики, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка*

28.07.2016